Chapitre 13

Analyse asymptotique

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :

- le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.
- a est un point de I ou une extrémité (finie ou infinie) de I.
- f et g designent des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a, de sorte que le quotient $\dfrac{1}{g(x)}$ a un sens pour toute valeur $x \neq a$ qui est “assez proche de a”.

"$g \neq 0$ sur un voisinage épointé de a" signifie :

- Lorsque $a = +\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g \neq 0$ sur $I \cap]A, +\infty[$.
- Lorsque $a = -\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g \neq 0$ sur $I \cap]-\infty, A[$.
- Lorsque $a \in \mathbb{R}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g \neq 0$ sur l'ensemble
$$I \cap \Big( ]a-\varepsilon, a[\cup]a, a+\varepsilon[\Big)$$
  Dans ce cas, la fonction g peut toutefois s'annuler en a.

1 Fonctions dominées, fonctions négligeables

1.1 Fonction négligeable, petit o

Définition 13.1 (Négligeabilité, petit o)

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$. On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{=} o(g)$$

On dira aussi abusivement que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a. Enfin, on peut également dire (mais c'est plus rare) que g est prépondérante devant f.

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On peut comparer x^n, $\ln x$ et e^x au voisinage de $+\infty$:

1. $\dfrac{x^n}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad x^n \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$.
2. $\dfrac{\ln x}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$.
3. $\dfrac{\ln x}{x^n} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(x^n)$.

Comparer x^n, $\ln x$ et e^x au voisinage de zéro :

1. x^n et e^x : $\quad \dots \underset{x \to 0}{=} o(\dots)$
2. x^n et $\ln x$: $\quad \dots \underset{x \to 0}{=} o(\dots)$
3. e^x et $\ln x$: $\quad \dots \underset{x \to 0}{=} o(\dots)$

Remarque. Pour comparer f et g, on peut regarder la limite de $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right|$:

- Si $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$
- Si $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors par quotient $\left| \dfrac{g(x)}{f(x)} \right| \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et donc $\dfrac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Dans ce cas, $g(x) \underset{a}{=} o(f(x))$.

Exemple 2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Comparer x^α et x^β au voisinage de $+\infty$ puis au voisinage de 0 :

$$\dots \underset{x \to +\infty}{=} o(\dots) \qquad \text{car}$$
$$\dots \underset{x \to 0}{=} o(\dots) \qquad \text{car}$$

Remarque. Malgré le signe égal, il faut bien garder à l'esprit que $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ n'exprime pas une égalité mais une limite. Cela signifie que plus x se "rapproche" de a, plus $f(x)$ est "petit" devant $g(x)$.

1.2 Fonction dominée, grand O

Définition 13.2 (Domination, grand O)

On dit que f est dominée par g au voisinage de a, si $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage (épointé) de a. On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x)) \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{=} O(g)$$

Rappel : si $V \subset \mathbb{R}$, on dit que $\frac{f}{g}$ est bornée sur V si

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V \qquad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C$$

Théorème 13.3

$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$. La réciproque est fausse.

Exemple 3. On a $\sin x \underset{x \to +\infty}{=} O(1)$ car $\left|\frac{\sin x}{1}\right| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc au voisinage de $+\infty$).
Par contre $\cancel{\sin x \underset{x \to +\infty}{=} o(1)}$ est *faux* : $\sin x$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 4. Montrer que $\sin x \underset{x \to 0}{=} O(x)$.

Remarque.

- Si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{K}$, alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.
  La réciproque est fausse : $\sin x \underset{x \to +\infty}{=} O(1)$ mais $x \mapsto \frac{\sin x}{1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- $f \underset{a}{=} O(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.
  $f \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
- Attention : on ne peut pas écrire $1 \underset{x \to +\infty}{=} O(\sin x)$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ n'est pas définie au voisinage de $+\infty$ (en effet, quel que soit le voisinage $[A, +\infty[$ de $+\infty$, cette fonction n'est pas définie dessus).
  Par contre, on peut écrire $\sin x \underset{x \to 0}{=} O(x)$: en effet, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ donc sur un voisinage épointé en 0.

1.3 Propriétés du grand O et du petit o

Proposition 13.4 (Transitivité de O et o)

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction qui vérifie les mêmes hypothèses que g.

$$f \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} O(h) \quad \Longrightarrow \quad f \underset{a}{=} O(h)$$
$$f \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad g \underset{a}{=} o(h) \quad \Longrightarrow \quad f \underset{a}{=} o(h)$$

Démonstration. Pour la première assertion, si $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{g}{h}$ sont bornées au voisinage de a, alors il en va de même pour $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{g}{h}$. Donc $f \underset{a}{=} O(h)$.

Pour la seconde assertion, si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et que $\dfrac{g}{h}$ tend vers zéro en a, alors par produit, $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{g}{h}$ tend vers zéro en a. □

Proposition 13.5 (Opérations avec O et o)

Soit $f_1 : I \to \mathbb{K}$ et $f_2 : I \to \mathbb{K}$.

1. Combinaison linéaire : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$f_1 \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} O(g) \Longrightarrow \lambda f_1 + \mu f_2 \underset{a}{=} O(g)$$
$$f_1 \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} o(g) \Longrightarrow \lambda f_1 + \mu f_2 \underset{a}{=} o(g)$$

2. Multiplication par un scalaire dans o ou O : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$f \underset{a}{=} O(g) \iff f \underset{a}{=} O(\lambda g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \iff f \underset{a}{=} o(\lambda g)$$

3. Produit : soit $g_1 : I \to \mathbb{K}$ et $g_2 : I \to \mathbb{K}$ qui vérifient les mêmes hypothèses que g.

$$f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} O(g_2) \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$$
$$f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} o(g_2) \Longrightarrow f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$$

Démonstration. Pour les o, c'est immédiat par opérations sur les limites. Pour les O, il faut revenir à la définition. Par exemple pour la première assertion :

- si $\dfrac{f_1}{g}$ est bornée sur un voisinage épointé V_1 de a,
- si $\dfrac{f_2}{g}$ est bornée sur un voisinage épointé V_2 de a,
- alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage épointé de a et $\lambda \dfrac{f_1}{g} + \mu \dfrac{f_2}{g} = \dfrac{\lambda f_1 + \mu f_2}{g}$ est bornée sur $V_1 \cap V_2$.

□

Théorème 13.6 (Composition à droite)

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit u une fonction définie au voisinage de t_0, à valeurs dans I.

$$\begin{cases} u(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} a \\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \end{cases} \implies f\circ u(t) \underset{t\to t_0}{=} o(g\circ u(t))$$

Et idem lorsque le o est remplacé par un O.

Démonstration. Pour les o, cela découle de la composition des limites : si $u(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} a$ et $\frac{f}{g}(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $\frac{f}{g}(u(t)) = \frac{f(u(t))}{g(u(t))} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$. La preuve avec les O est plus technique mais moins importante. □

Exemple 5. On a vu que $\sin x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$. Alors si u est une fonction telle que $u(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, on a $\sin(u(t)) \underset{t\to+\infty}{=} o(u(t))$. Par exemple :

- $\sin t^2 \underset{t\to+\infty}{=} o(t^2)$ (avec $u(t) = t^2$)
- $\sin(2t) \underset{t\to+\infty}{=} o(2t)$ (avec $u(t) = 2t$)

Et si $u(t) \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$, alors $\sin(u(t)) \underset{t\to 0}{=} o(u(t))$. Par exemple $\sin\frac{1}{t^2} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Remarque. Attention ! On ne peut pas composer à gauche dans $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$. Contre-exemple :

$$x \underset{x\to 0}{=} o(1) \quad \text{mais} \quad \cancel{e^x \underset{x\to 0}{=} o(e^1)} \quad \text{car} \quad \frac{e^x}{e^1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{e}$$

Théorème 13.7 (Reformulation des croissances comparées)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad |\ln x|^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$
2. $$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x}) \quad \text{et} \quad e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

2 Fonctions équivalentes

Hypothèse

Dans cette section, toutes les fonctions (y compris f) vérifient la même hypothèse que g : elles ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de a.

2.1 Définition

Définition 13.8

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$. On note alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

On dit aussi que g est un équivalent de f au voisinage de a.

Exemple 6.

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $3x^2-2x+4 \underset{x\to+\infty}{\sim}$ car (si $x\neq 0$)
- $3x^2-2x+4 \underset{x\to 0}{\sim}$ car (si $x\neq 0$)
- $3x^2-2x \underset{x\to 0}{\sim}$ car (si $x\neq 0$)

Remarque. Pour tout $\ell\in\mathbb{K}$ **non nul**, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$
On ne doit **jamais** écrire "0" dans un équivalent : $\cancel{f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0}$.

Proposition 13.9 (Équivalents d'un polynôme)

Soit $P:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ une fonction polynômiale non nulle : on pose $P : x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n\neq 0$. Alors

$$P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$$

où $a_d x^d$ est le monôme **non nul** de plus petit degré de P.

Proposition 13.10 (Relation d'équivalence)

Soit $h : I\to\mathbb{K}$ (qui vérifie la même hypothèse que g).

1. Réflexivité : $f \underset{a}{\sim} f$
2. Symétrie : si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$
3. Transitivité : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration. Évident par opérations sur les limites. □

2.2 Opérations et équivalents

Proposition 13.11 (Opérations avec les équivalents)

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ (qui vérifient la même hypothèse que g). On suppose que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$.

1. Multiplication par un scalaire non nul : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda f_1 \underset{a}{\sim} \lambda g_1$
2. Produit : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. Quotient : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. Puissance entière : pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f_1^p \underset{a}{\sim} g_1^p$
5. Puissance réelle : si f_1, g_1 sont strictement positives sur un voisinage épointé de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha$

Démonstration. Par opérations sur les limites. □

Remarque. ATTENTION : on ne peut ***JAMAIS*** additionner (ou soustraire) deux équivalents :

$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \qquad \text{et} \qquad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \;\not\Longrightarrow\; f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$$

Exemple 7. Contre-exemple :

Proposition 13.12 (Ajouter / Retirer un terme dans un équivalent)

Si $f + g$ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a,

$$f + g \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} o(g)$$

ou de manière équivalente, en posant $h = f + g$:

$$h \underset{a}{\sim} g \iff h - g \underset{a}{=} o(g)$$

Démonstration. Il suffit de montrer la deuxième équivalence. On procède par équivalences successives :

$$h \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x \to a} \left(\frac{h(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \iff \lim_{x \to a} \left(\frac{h(x) - g(x)}{g(x)} \right) = 0 \iff h - g \underset{a}{=} o(g)$$

□

En particulier, si $f \underset{a}{=} o(g)$, on peut ajouter ou retirer f dans un équivalent où intervient g :

$$g \underset{a}{\sim} h \iff f + g \underset{a}{\sim} h$$

En effet, par la Proposition ci-dessus, $f + g \underset{a}{\sim} g$, et on montre les deux implications par la transitivité de $\underset{a}{\sim}$.

Méthode (Équivalent d'une somme)

Étant donné deux fonctions f, g, pour trouver un équivalent de $f+g$ en a, la première chose à tenter est de vérifier si l'une des fonctions est négligeable devant l'autre, i.e. si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $g \underset{a}{=} o(f)$.

Si par exemple $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f+g \underset{a}{\sim} g$ et la somme a disparu.

Exemple 8. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2 + x}{x(e^x - x)}$.

En $+\infty$:

- $(\ln x)^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim}$
- $e^x - x \underset{x\to+\infty}{\sim}$ donc $x(e^x - x) \underset{x\to+\infty}{\sim}$

Donc

$$\frac{(\ln x)^2 + x}{x(e^x - x)} \underset{x\to+\infty}{\sim}$$

En 0 :

- $(\ln x)^2 + x \underset{x\to 0}{\sim}$
- $e^x - x \underset{x\to 0}{\sim}$ donc $x(e^x - x) \underset{x\to 0}{\sim}$

Donc

$$\frac{(\ln x)^2 + x}{x(e^x - x)} \underset{x\to 0}{\sim}$$

Proposition 13.13 (Composition à droite dans un équivalent)

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit u une fonction définie au voisinage de t_0, à valeurs dans I.

$$\begin{cases} u(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} a \\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \end{cases} \implies f\circ u(t) \underset{t\to t_0}{\sim} g\circ u(t)$$

Par exemple, comme $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on peut en déduire que :

- $\sin(2t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$ (on compose à droite par $u(t) = 2t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$).
- $\sin(-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$ (on compose à droite par $u(t) = -t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$).
- $\sin(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ (on compose à droite par $u(t) = t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$).

Attention ! On ne peut pas composer à gauche dans un équivalent :

$$x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1 \qquad \text{mais} \qquad e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$$

2.3 Les équivalents à connaitre

Proposition 13.14

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

Démonstration. Pour tout $x \neq a$, comme f est dérivable en a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)}{f'(a)} = 1$$

d'où le résultat. □

Corollaire 13.15 (Équivalents en 0 à connaitre)

$$\begin{array}{lrcl@{\qquad}rcl}
 & e^x - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & x & \sin x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
 & \ln(1+x) & \underset{x \to 0}{\sim} & x & \tan x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}^* & (1+x)^\alpha - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & \alpha x & \arcsin x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
 & \operatorname{sh} x & \underset{x \to 0}{\sim} & x & \arctan x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
 & \operatorname{ch} x - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & \dfrac{x^2}{2} & \cos x - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & -\dfrac{x^2}{2}
\end{array}$$

Démonstration. Les formules des quatre premières lignes découlent directement de la Proposition 13.14. Pour la dernière ligne, on ne peut pas l'appliquer car $\cos'(0) = 0$ et $\operatorname{ch}'(0) = 0$, ce qui donnerait 0 à droite de l'équivalent. On réécrit alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} -2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2}$$

L'équivalent en 0 ci-dessus vient du fait que $\sin x \sim x$ donc par composition à droite $\sin \frac{x}{2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. Ensuite, on met l'équivalent au carré : $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \left(\frac{x}{2}\right)^2$ et enfin on le multiplie par -2. Finalement, $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. □

2.4 Autres propriétés des équivalents

Proposition 13.16 (Conservation du signe et des limites par les équivalents)

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

- Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
- On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $g > 0$ au voisinage de a, alors $f > 0$ au voisinage de a.
- On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $g < 0$ au voisinage de a, alors $f < 0$ au voisinage de a.

Théorème 13.17 (Théorème d'encadrement)

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a.
Si $f \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h$.

3 Relations de comparaison pour les suites

Les relations de comparaison vues pour les fonctions peuvent être adaptées aux suites. Pour les fonctions, on les définit au voisinage d'un point a (fini ou infini). Pour les suites, qui sont définies sur $\mathbb{N}$, toutes les relations sont définies en $+\infty$. L'hypothèse "g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a" devient alors "(v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang".

Hypothèse

Dans toute cette section, on suppose que (u_n) et (v_n) sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. De plus on suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Définition 13.18

1. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.
2. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
3. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

À nouveau, on s'autorise à écrire abusivement que le terme général u_n soit négligeable / dominé / équivalent au terme général v_n. Enfin, pour le premier point, on trouve également la formule "v_n est prépondérante devant u_n".

Exemple 9. Pour chacun des cas ci-dessous, comparer u_n et v_n.

1. $u_n = n^2 - n - 1 \quad \text{et} \quad v_n = n^2$
2. $u_n = n^2 - n - 1 \quad \text{et} \quad v_n = 2n^2$
3. $u_n = n^2 \quad \text{et} \quad v_n = 2^n$

La plupart des propriétés vues pour les fonctions s'adaptent aux suites. Plutôt que de tout réécrire, on donne les propriétés conservées avec quelques exemples. Lorsqu'une suite apparait dans un O, dans un o, ou d'un côté d'un $\sim$, on suppose qu'elle est non nulle à partir d'un certain rang.

- Les O et o sont transitifs (Proposition 13.4).
  Exemple : si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.
- On peut faire des combinaisons linéaires, des produits, etc. avec des O et des o (Proposition 13.5).
  Exemple : si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$
- La relation $\sim$ est une relation d'équivalence pour les suites non nulles à partir d'un certain rang.
- On peut faire le produit, le quotient, mettre à la puissance (sous réserve de sens) un équivalent avec des suites (Proposition 13.11)

Exemple : si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors $a_n u_n \sim b_n v_n$.
Exemple : si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$.

- On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents. Mais on peut enlever un terme négligeable par rapport à l'autre (Proposition 13.12).
  Exemple : $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
  Exemple : $a_n \sim b_n$ si et seulement si $a_n = b_n + o(b_n)$.

- On conserve la limite et le signe dans un équivalent (Proposition 13.16).

- On dispose d'un théorème d'encadrement (Proposition 13.17).
  Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que $u_n \sim w_n$, alors (v_n) est équivalente à u_n et w_n.

La composition à droite pourrait être adaptée, mais ce n'est guère utile. Par contre, on peut partir d'un équivalent de fonctions et composer à droite par une suite :

Théorème 13.19

On suppose que f, g ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a. On a

$$\begin{cases} \lim u_n = a \\ f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \end{cases} \implies f(u_n) \sim g(u_n)$$

Exemple 10. Déterminer un équivalent de $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exemple 11. Déterminer un équivalent de $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

4 Développement limités

Hypothèse

Pour le reste du chapitre, a est supposé fini (c'est toujours un point de I ou une extrémité de I).

4.1 Remarque préliminaire (importante !)

Dans le reste du chapitre, on considérera typiquement des $o(g(x))$ avec des fonctions g qui ne s'annulent par sur I tout entier, sauf éventuellement en a. Avec cette hypothèse supplémentaire, on a l'équivalence suivante :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \iff \begin{cases} \text{Il existe une fonction } \varepsilon : I \to \mathbb{K} \text{ tels que} \\ \forall x \in I \qquad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \qquad\qquad \text{et } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

En effet, comme $g \neq 0$ sur $I \setminus \{a\}$, on peut poser $\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$

On peut faire deux remarques sur cette réécriture :

- Alors que $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est une limite, l'écriture $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ constitue une "vraie" égalité, valide pour tout $x \in I$, avec ε une fonction continue sur I. On pourra par exemple ajouter, soustraire, intégrer (etc.) des égalités de ce type comme on a l'habitude de le faire avec des équations.
- Cela permet d'interpréter un $o(g(x))$ comme étant un terme $\varepsilon(x)g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Par exemple, avec $a = 0$ et $g(x) = x^n$, on peut considérer que

$$o(x^n) \quad \text{"="} \quad x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

  Cette interprétation entraine les règles de calcul suivantes :

$$\begin{aligned} & o(x^n) \pm o(x^n) \quad \text{"="} \quad o(x^n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}^* \qquad & \lambda o(x^n) \quad \text{"="} \quad o(\lambda x^n) \quad \text{"="} \quad o(x^n) \\ & o(x^n) \quad \text{"="} \quad x^n o(1) \\ & o(x^n)o(x^m) \quad \text{"="} \quad o(x^{n+m}) \end{aligned}$$

  Par exemple :

$$\begin{aligned} o(x^n) - o(x^n) \quad & \text{"="} \quad x^n\varepsilon_1(x) - x^n\varepsilon_2(x) && \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0 \\ & = x^n\left(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)\right) \\ & = x^n\widetilde{\varepsilon}(x) && \text{avec} \quad \widetilde{\varepsilon} := \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ & \text{"="} \quad o(x^n) && \text{car} \quad \lim_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0 \end{aligned}$$

  Les fonctions ε_1 et ε_2 sont a priori différentes, donc on ne peut pas dire que $\widetilde{\varepsilon}$ est nulle. Par contre, par différence de limite, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$.

4.2 Généralités sur les DL

Si $h : I \to \mathbb{K}$, on écrit

$$f(x) \underset{x\to a}{=} h(x) + o(g(x))$$

pour signifier que $f(x) - h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Définition 13.20 (Développement limité)

On dit que f admet un DL à l'ordre n en a (ou un $DL_n(a)$) s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in I \qquad f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$$

Cela équivaut à dire que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

On dira aussi (abusivement) qu'une expression $f(x)$ admet un $DL_n(a)$.

Proposition 13.21

La fonction f admet un DL à l'ordre n en a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un DL à l'ordre n en 0, càd s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et une fonction $\widetilde{\varepsilon} : I \to \mathbb{K}$ tels que

$$\forall h \in I \qquad f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + h^n\widetilde{\varepsilon}(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0}\widetilde{\varepsilon}(h) = 0$$

ou de manière équivalente

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_kh^k + o(h^n)$$

On passe d'une forme à l'autre en posant $x = a+h$ et $\widetilde{\varepsilon}(h) := \varepsilon(a+h)$. Grâce à cette propriété, on peut toujours se ramener à un DL en 0, ce que l'on fera par la suite.

Remarque. f admet un DL à l'ordre n en a s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} P(h) + o(h^n)$$

Le polynôme P est appelé la partie régulière du DL. Le terme $o(h^n)$ est appelé le reste du DL.

Exemple 12. La fonction $f : x \mapsto 1 - x^2 + x^2\ln(1+x)$ admet un $DL_2(0)$, i.e. un DL à l'ordre 2 en 0. En effet, comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$, on a

$$x^2\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$$

et donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2)$$

Notons que f admet aussi un $DL_1(0)$ car $-x^2 + x^2\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$, et donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$$

Exemple 13 (Exemple important)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$.

Exemple 14 (Exemple important bis)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un $DL_n(0)$.

4.3 Premières propriétés

Théorème 13.22 (Unicité du DL)

Si f admet un $DL_n(a)$, ce DL est unique, i.e. la partie régulière associée à ce DL est unique.

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour $a = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, b_1, \dots, b_n)$ et

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

Alors, par différence, on trouve

$$0 \underset{x\to 0}{=} (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + \dots (b_n - a_n)x^n + o(x^n)$$

Par hypothèse, $(b_0 - a_0, \dots, b_n - a_n) \neq (0, \dots, 0)$. On note $p \in [\![0, n]\!]$ le plus petit entier tel que $b_p - a_p \neq 0$. Alors

$$0 \underset{x\to 0}{=} (b_p - a_p)x^p + \cdots + (b_n - a_n)x^n + o(x^n)$$

En divisant par x^p, pour tout $x \neq 0$, on obtient

$$0 \underset{x\to 0}{=} (b_p - a_p) + \underbrace{(b_{p+1} - a_{p+1})x + \cdots + (b_n - a_n)x^{n-p} + o(x^{n-p})}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

d'où $b_p - a_p = 0$. Contradiction. D'où le résultat. □

Théorème 13.23 (DL et parité)

On suppose que f admet un DL à l'ordre n **en zéro** :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

- Si f est paire, alors pour tout indice k impair, $a_k = 0$.
- Si f est impaire, alors pour tout indice k pair, $a_k = 0$.

Démonstration. On fait la preuve uniquement dans le cas où f est paire. Alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$$

Or, f étant paire, on a $f(x) = f(-x)$. Par unicité du DL, on en déduit que les parties régulières ci-dessus sont égales :

$$a_0 = a_0 \qquad a_1 = -a_1 \qquad a_2 = a_2 \qquad \dots \qquad a_n = (-1)^n a_n$$

c'est-à-dire $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout k. Ainsi, si k est impair, nécessairement $a_k = 0$. □

Théorème 13.24 (Troncature du DL)

On suppose que f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un $DL_p(a)$, obtenu en tronquant la partie régulière (on garde les termes de degré 0 à p) :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$$

Démonstration. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Si $p = n$, c'est évident. Si $p < n$, on peut écrire :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + x^{p+1}\left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p-1} + o(x^{n-p-1})\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

4.4 Liens entre DL, continuité, dérivabilité

Proposition 13.25 (DL_0 et continuité)

f admet un $DL_0(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + o(1)$$

si et seulement si f admet une limite finie en a, et dans ce cas $a_0 = \lim_{x\to a} f(x)$. De plus :

- Si f est définie en a alors $a_0 = f(a)$ et f est continue en a.
- Si f n'est pas définie en a, alors on peut la prolonger par continuité en a en posant $f(a) := a_0$.

Proposition 13.26 (DL_1 et dérivabilité)

On suppose que f est définie en a. f admet un $DL_1(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

si et seulement si f est dérivable en a, et dans ce cas $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Remarque. Attention, on ne peut pas généraliser cette propriété à des ordres supérieurs. On verra que si f est de classe C^n sur I et que $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$, mais la réciproque est fausse. Par exemple :

$$f(x) := x^3 \sin\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$$

Donc f admet un $DL_2(0)$. Pourtant, on va montrer que f n'est pas deux fois dérivable en zéro. Par troncature, f admet un $DL_1(0)$ avec $f(x) = 0 + 0x + o(x)$, donc par la Proposition ci-dessus :

- f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) := 0$.
- Cette fonction f (prolongée) est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$

Supposons par l'absurde que f soit deux fois dérivable en 0. Alors f' serait continue en 0, d'où $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) = 0$. Or, pour tout $x \neq 0$, le calcul donne

$$\underbrace{f'(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} = \underbrace{3x^2 \sin\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{2\cos\frac{1}{x^2}}_{\substack{\text{pas de limite} \\ \text{quand } x\to 0}}$$

On aboutit ainsi à une contradiction.

4.5 Formule de Taylor-Young, DL usuels

Théorème 13.27 (Formule de Taylor-Young)

On suppose que $a \in I$. Si f est de classe C^n sur I, alors elle admet un $DL_n(a)$ donné par

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^n)$$

Démonstration. Sera vu plus loin dans le chapitre. □

En remplaçant h par $x-a$ (donc $a+h$ par x), on obtient une autre version :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

En particulier, si f est de classe C^∞ sur I, elle admet un DL à tout ordre en tout point de I. La formule de Taylor-Young permet d'obtenir les DL des fonctions usuelles, cf le formulaire.

Exemple 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de exp.

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$.
f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$, donc par la formule de Taylor-Young elle admet un $DL_n(0)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} f(x) &= & \qquad\qquad f(0) &= \\ f'(x) &= & f'(0) &= \\ f''(x) &= & f''(0) &= \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= & f^{(n)}(0) &= \end{aligned}$$

Donc

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=}$$

Exemple 17. Déterminer le $DL_3(1)$ de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

4.6 Opérations sur les DL

Proposition 13.28 (Opérations sur les DL)

On suppose que f, g admettent des $DL_n(a)$, de parties régulières P, Q respectivement. Alors :

1. **Combinaison linéaire** : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière $P + Q$.
2. **Produit** : la fonction fg admet un $DL_n(a)$ de partie régulière tronqué au degré n.
3. **Composition** : soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, u une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I. Si :
   - $\lim\limits_{t\to b} u(t) = a$
   - u admet un $DL_n(b)$ (et f admet un $DL_n(a)$)

   alors $f \circ u$ admet un $DL_n(b)$. En pratique, quitte à changer u et f, on peut toujours se ramener au cas $a = b = 0$. Dans ce cas, si
   $$\begin{aligned} f(h) &\underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n) \\ u(h) &\underset{h\to 0}{=} 0 + [b_1 h + \cdots + b_n h^n] + o(h^n) && (b_0 = a = 0) \end{aligned}$$
   alors
   $$(f \circ u)(h) = a_0 + a_1 [\cdots] + a_2 [\cdots]^2 + \cdots + a_n [\cdots]^n + o(h^n)$$
   et il suffit de tronquer le membre de droite au degré n pour obtenir le DL.
4. **Inverse** : si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{g}$ admet un $DL_n(a)$. En pratique, on pose $G(h) = g(a+h)$ pour se ramener au calcul du $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{G}$, et on calcule de la façon suivante :
   $$\begin{aligned} \frac{1}{G(h)} &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + o(h^n)} && b_0 = G(0) = g(a) \neq 0 \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{b_0} \times \frac{1}{1 - \left[\frac{b_1 h + \cdots + b_n h^n + o(h^n)}{-G(0)}\right]} \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{b_0} \times \left(1 + [\cdots] + [\cdots]^2 + \cdots + [\cdots]^n + o(h^n)\right) \end{aligned}$$

Exemple 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction ch.

On peut montrer de la même manière la formule du $DL_{2n}(0)$ de sh.

Exemple 19. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\cos x + \sin x$ et de $\cos x \sin x$.

Exemple 20. Déterminer le $DL_4(0)$ de $\sqrt{\cos x}$.

Exemple 21. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan x$.

4.7 Intégrations de DL

Proposition 13.29 (Intégration d'un DL)

On suppose que f est continue sur I. Soit F une primitive de f sur I.
Si f admet un $DL_n(a)$

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Démonstration. On fait la preuve pour $a=0$. Soit $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ une fonction telle que

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Soit $t \in I$. On intègre selon x entre 0 et t :

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)\right) dx$$

$$\begin{aligned} F(t) - F(a) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^t x^k dx + \int_0^t x^n \varepsilon(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^t + \int_0^t x^n \varepsilon(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{t^{k+1}}{k+1} + \int_0^t x^n \varepsilon(x)dx \end{aligned}$$

Et on admet pour le moment que $\int_0^t x^n \varepsilon(x)dx \underset{t\to 0}{=} o(t^{n+1})$. D'où le résultat. □

Exemple 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de $F : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple 23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_3(0)$ de arctan.

On peut obtenir de même les DL de arcsin et arccos.

Remarque (Preuve "vite faite" de Taylor-Young)**.** Soit $f \in C^n(I)$ et $a \in I$. Alors $f^{(n)}$ est continue et admet donc un $DL_0(a)$:

$$f^{(n)}(x) \underset{x \to a}{=} f^{(n)}(a) + o(1)$$

En intégrant ce DL, on trouve

$$f^{(n-1)}(x) \underset{x \to a}{=} f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)x + o(x)$$

et donc $f^{(n-1)}$ admet un $DL_1(a)$. En réintégrant :

$$f^{(n-2)}(x) \underset{x \to a}{=} f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)x + f^{(n)}(a)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc $f^{(n-2)}$ admet un $DL_2(a)$, etc. Par récurrence, on montre donc que $f^{(0)} = f$ admet un $DL_n(a)$, donné par le Théorème 13.27.

Remarque. Si f admet un $DL_n(a)$ **ET** si f' admet un $DL_{n-1}(a)$, alors on obtient le DL de f' en dérivant la partie régulière du DL de f.
Pour la proposition 13.29, il n'y a pas besoin de justifier que F admette un $DL_{n+1}(a)$. Par contre, pour dériver, l'hypothèse "f' admet un $DL_{n-1}(a)$" est essentielle. Il peut arriver que f admette un $DL_n(a)$ mais que f' n'admette pas un $DL_{n-1}(a)$.
Par exemple, si $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ alors f admet un $DL_1(0)$: $f(x) = 0 + 0x + o(x)$. Supposons par l'absurde que f' admettait un $DL_0(0)$. En particulier, f' serait continue en 0. Or, on peut vérifier que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

et on voit que f' n'est pas continue en 0 (c'est similaire à la remarque sous la proposition 13.26).

5 Applications des développement limités

Dans le reste du chapitre, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

5.1 Étude du signe local d'une fonction

Définition 13.30 (Forme normalisée)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Si la partie régulière de ce DL est non nulle, en notant $p \in [\![0, n]\!]$ le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a

$$f(x) \underset{x \to a}{=} (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p})\right)$$

Cette écriture est appelée forme normalisée du $DL_n(a)$ de f.

Cette forme normalisée permet d'obtenir un équivalent de f en a :

Théorème 13.31

Supposons que f admet un $DL_n(a)$ sous forme normalisée :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p})\right)$$

Alors,

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

En particulier, f est du signe (strict) de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a.

Exemple 24. On pose $f : x \mapsto 3 + \ln(1+x) + \frac{x^2}{2}$. Donner l'équation de la tangente T à C_f en 0, puis la position relative de C_f par rapport à T (au voisinage de 0).

5.2 Extrema locaux : conditions du second ordre

Rappel : si a est un point *intérieur* de I (i.e. ce n'est pas une extrémité), si f est dérivable en a, et si f admet un extremum local en a, alors nécessairement a est un point critique, i.e. $f'(a) = 0$.

Il ne s'agit que d'une condition nécessaire : tout extremum local (intérieur à I) est un point critique, la réciproque est fausse : 0 est un point critique de $f(x) = x^3$, mais ce n'est pas un extremum local.

Proposition 13.32 (Conditions d'optimalité du second ordre)

Soit a un point intérieur de I et $f \in C^2(I)$.
Conditions nécessaires du second ordre :

- Si f admet un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
- Si f admet un maximum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$.

Conditions suffisantes du second ordre :

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local (strict) en a.
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local (strict) en a.

Démonstration. Comme f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a implique qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(a+h)-f(a) = f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + h^2\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$

Preuve des conditions nécessaires : on ne montre que le premier point. Si f admet un minimum local en a, alors

1. D'une part a est un point critique donc $f'(a) = 0$.
2. D'autre part, $f(a+h)-f(a) \geq 0$ pour h suffisament proche de zéro.

Ainsi, pour $|h|$ assez petit,

$$0 \leq 0 + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

En divisant par h^2 et en prenant la limite quand h tend vers zéro, on obtient $\frac{1}{2}f''(a) \geq 0$. D'où le résultat.

Preuve des conditions suffisantes : on ne montre que le premier point. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors

$$f(a+h)-f(a) = \frac{1}{2}f''(a)h^2 + h^2\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)$$

Comme $f''(a) > 0$, il s'agit d'un DL de $h \mapsto f(a+h)-f(a)$ sous forme normalisée. Ainsi,

$$f(a+h)-f(a) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

et en particulier, $f(a+h)-f(a)$ a le même signe strict que $\frac{1}{2}f''(a)h^2$. Or, pour tout $h \neq 0$, on a $\frac{1}{2}f''(a)h^2 > 0$, donc $f(a+h) > f(a)$. Ainsi, a est un minimum local strict. □

Remarque. Si $f'(a) = f''(a) = 0$, tous les cas sont possibles (maximum, minimum, pas d'extremum en a). Par exemple $f(x) = x^2$ et $f(x) = \pm x^4$ avec $a = 0$.

Exemple 25. On cherche les extrema locaux de la fonction $f(x) = e^{x^3-3x}$.

On notera que la proposition 13.32 ne concerne que des extrema *locaux* : dans l'exemple ci-dessus, on peut vérifier qu'aucun extremum local n'est un extremum global.

5.3 Compléments

Dans cette section $\pm\infty$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$ (ou bien tous les $\pm\infty$ désignent $+\infty$, ou bien tous les $\pm\infty$ désignent $-\infty$, comme "$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$").

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$.

La fonction f peut n'être définie qu'au voisinage de $\pm\infty$, mais on considère que $D_f = \mathbb{R}$ ici pour simplifier.

Méthode (Asymptote oblique en $\pm\infty$)

On cherche à savoir si une fonction f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$.

1. On part de l'expression $\frac{f(x)}{x}$, et on la réécrit comme une fonction de $\frac{1}{x}$ uniquement : on trouve donc une fonction F telle que $F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x}$.
2. On pose $u = \frac{1}{x}$, de sorte que $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(u)$
3. On cherche un $DL_1(0)$ de F :
$$F(u) \underset{u\to 0}{=} a + bu + o(u)$$
Si F n'admet pas de $DL_1(0)$, alors f n'admet pas d'asymptote oblique.
4. On pose alors $x = \frac{1}{u}$ pour obtenir
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to\pm\infty}{=} a + b.\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
5. On multiplie tout par x et on obtient $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + o(1)$. Ainsi, f admet $y = ax+b$ comme asymptote oblique en $\pm\infty$.
6. Bonus : si F admet un $DL_2(0)$:
$$F(u) \underset{u\to 0}{=} a + bu + cu^2 + o(u^2)$$
$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
   (a) $\boxed{\text{Si } c \neq 0}$
   $$f(x) - (ax+b) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{c}{x}$$
   ce qui nous donne la position relative de C_f par rapport à son asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$, selon le signe de $\frac{c}{x}$ quand $x \to \pm\infty$.

   (b) Si $c = 0$, il faut aller à un ordre plus élevé dans le DL de F jusqu'à ce qu'on trouve un terme non nul